

О СТАТИСТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ АКУСТИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ НИЗКОЧАСТОТНОГО ЗВУКА В ВОЛНОВОДЕ МЕЛКОГО МОРЯ С РАЗВИТЫМ ПОВЕРХНОСТНЫМ ВОЛНЕНИЕМ

О. Э. Гулин^{*1}, Г. И. Долгих¹ и И. О. Ярошук¹

¹Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильинова Дальневосточного отделения Российской академии наук, Владивосток, Россия

* **Контакт:** Олег Эдуардович Гулин, gulinoe@poi.dvo.ru

Рассмотрена статистическая задача о распространении и рассеянии низкочастотного акустического сигнала в условиях мелководного волновода со случайно-шероховатой поверхностью и горизонтальным поглощающим жидким дном. Такой неоднородный волновод исследуется в рамках метода поперечных сечений с помощью теории локальных мод. Для определения модовых амплитуд формулируется краевая задача, которая заменяется соответствующей задачей с начальными условиями для уравнений погружения. Последние уравнения без приближений решаются стандартными вычислительными схемами, что позволяет эффективно выполнять моделирование статистических характеристик поля звукового сигнала. В работе представлены расчёты затухания и флюктуаций интенсивности сигнала в волноводе арктического типа при развитом поверхностном волнении для двух типов импеданса донной границы. Показано, что влияние случайной поверхности на интенсивность распространяющегося сигнала достаточно мало для трасс типичной протяжённости в мелком море. Потери интенсивности за счёт флюктуаций медленно растут с расстоянием. Сравнение результатов, полученных разными методами решения данной статистической задачи (адиабатическим, приближением Вентцеля – Крамера – Бриллюэна (ВКБ)), демонстрирует заметное количественное расхождение. Показано, что вид корреляционной функции (спектра) флюктуаций поверхности слабо влияет на среднюю интенсивность поля сигнала, а затухание определяется амплитудой флюктуаций и радиусом их корреляции.

Ключевые слова: мелководный волновод арктического типа, случайно-шероховатая поверхность моря, метод поперечных сечений, локальные моды, уравнения погружения, однодиапазонное распространение, адиабатическое приближение, метод ВКБ, статистическое моделирование.

Цитирование: Гулин О. Э., Долгих Г. И., Ярошук И. О. О статистическом моделировании акустических потерь при распространении низкочастотного звука в волноводе мелкого моря с развитым поверхностным волнением // Russian Journal of Earth Sciences. — 2025. — Т. 25. — ES6013. — DOI: 10.2205/2025es001098 — EDN: RZUHJU

Введение

В настоящей работе рассмотрен один из важных аспектов классической проблемы рассеяния волн на шероховатой поверхности [Басс и Фукс, 1972]. Он касается влияния взволнованной морской поверхности на поле низкочастотного сигнала, распространяющегося в слое мелководного волновода с импедансным поглощающим дном в виде жидкого полупространства. Интенсивность поля сигнала, описывающая потери при распространении в волноводе, является фундаментальной акустической характеристикой, анализ которой позволяет делать выводы, как о регулярных, так и статистических свойствах среды волновода и его границ. Поведение средней интенсивности и других

<https://elibrary.ru/RZUHJU>

Получено: 7 октября 2023 г.

Принято: 10 декабря 2025 г.

Опубликовано: 22 декабря 2025 г.



© 2025. Коллектив авторов.

количественных характеристик потерь при распространении звукового сигнала, получаемых при статистическом моделировании, позволяют прогнозировать возможности акустического мониторинга и подводной связи для реальных волноводов с флюктуирующими параметрами в шельфовых зонах океана. Несмотря на наличие обширной литературы по проблеме рассеяния волн на шероховатой поверхности [Басс и Фукс, 1972; Бреховских и Лысанов, 2007; Рытов и др., 1978; Darmon *et al.*, 2020; Katsnelson *et al.*, 2012; Ogilvy, 1987], особенностям затухания средней интенсивности звукового поля и другим её статистическим характеристикам в волноводах с потерями и случайной поверхностью в известной литературе уделено недостаточно внимания. Можно выделить лишь ряд публикаций по теме нашего исследования. Они посвящены модельным вычислениям потерь при распространении сигнала в мелководном волноводе с взволнованной поверхностью, проведённым в рамках приближенных методов малых возмущений и плавных возмущений Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна (ВКБ) [Луньков и Петников, 2010; Луньков и др., 2017; Katsnelson *et al.*, 2012]. Одним из результатов, полученных авторами, является факт слабого влияния взволнованной поверхности на средние потери низкочастотного сигнала при распространении. В настоящей работе этот результат качественно подтверждается, однако количественно нами получены иные значения средних потерь на трассах мелкого моря длиной 20 км. Возможным объяснением расхождений в вычислениях может являться приближенный анализ как детерминированного (метод малых возмущений), так и статистического распространения сигнала (непредставительные ансамбли реализаций), проведённый в работах вышеупомянутых авторов.

Предлагаемое исследование выполнено в точной постановке задачи для уравнений акустики на основе численного статистического моделирования [Gulin and Yaroshchuk, 2014]. Статистические эффекты проанализированы для двух типов импедансной границы раздела вода – донные осадки, когда имеется сильное прохождение акустической энергии в дно [Гулин и Яроцук, 2018], и наоборот – когда происходит сильное отражение от донной границы. В рамках статистического моделирования решение задачи ищется для отдельных случайных реализаций шероховатой поверхности волновода из представительного ансамбля реализаций с последующим усреднением. Для каждой реализации расчёты проводятся на основе универсального локально модового подхода, развитого в работах [Гулин, 2010; Гулин и др., 2024]. В рамках него амплитуды мод, зависящие от расстояния благодаря флюктуациям поверхности, ищутся путём переформулировки исходной краевой задачи для уравнений акустики в эквивалентные причинные уравнения первого порядка (уравнения погружения) [Кляцкин, 1986, 2001].

Формулировка проблемы и модовое представление решения

Рассмотрим аксиально-симметричную постановку задачи: (r, z) – координаты цилиндрической системы, точечный источник излучения расположен в водной среде мелкого моря при $r = 0, z = z_0 \in (0, H)$. Звуковое поле частоты ω в морском волноводе с шероховатой свободной поверхностью $H(r)$, скоростью звука $c(r, z)$ и плотностью $\rho(r, z)$ описывается линейными уравнениями акустики первого порядка для полей звукового давления $p(r, z)$ и компонент колебательной скорости жидких частиц, $w(r, z)$ – вертикальной и $v(r, z)$ – горизонтальной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(r, z)}{\partial z} &= i\omega\rho(r, z)w(r, z), & \frac{\partial p(r, z)}{\partial r} &= i\omega\rho(r, z)v(r, z), \\ \rho(r, z) \left[\frac{\partial w(r, z)}{\partial z} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) v(r, z) \right] - \frac{i\omega}{c^2(r, z)} p(r, z) &= \frac{i\delta(r)\delta(z - z_0)}{\omega r}. \end{aligned} \quad (1)$$

Будем рассматривать модель среды волновода, включающую водную толщу, $0 < z \leq H(r)$, и подстилающее полупространство жидких осадков, $z \leq 0$. К уравнениям (1) формулируются соответствующие граничные условия на поверхности и дне волновода. На свободной неровной поверхности моря $p(H(r)) = 0$. Условие на донной границе раздела вода – жидкые осадки соответствует непрерывности давления $p(r, +0) = p(r, -0)$.

и компоненты скорости жидкых частиц $v_n = [w^2 + v^2]^{1/2}$, нормальной к этой границе раздела. В случае её горизонтальности и $\rho(r, z) = \rho(z)$: $v_n(r, +0) = w(r, +0) = w(r, -0)$. Подразумевается также выполнение условий излучения при $r \rightarrow \infty$, $z \rightarrow -\infty$, которое исключает из рассмотрения волны, приходящие из бесконечности. Согласно методу поперечных сечений (локальных мод) [Бреховских и Годин, 2009; Бреховских и Лысанов, 2007] решение (1) с озвученными условиями целесообразно искать в низкочастотном диапазоне с помощью разложений по локальным модам (модам волновода сравнения в каждом r -сечении), число которых для расчётов всегда ограничено ($m = 1, 2, \dots, M$):

$$\begin{aligned} p(r, z) &= \sum_{m=1}^M G_m(r) \varphi_m(r, z); & w(r, z) &= [i\rho(r, z)\omega]^{-1} \sum_{m=1}^M G_m(r) \partial \varphi_m(r, z) / \partial z; \\ v(r, z) &= [i\rho(r, z)\omega]^{-1} \sum_{m=1}^M F_m(r) \varphi_m(r, z). \end{aligned} \quad (2)$$

Условием применимости (2) является сходимость модовых рядов, позволяющая придать этим разложениям смысл [Бреховских и Годин, 2009]. В (2) под знаками сумм входят модовые амплитуды $G_m(r)$, $F_m(r)$, а также локальные собственные функции $\varphi_m(r, z)$ задачи на собственные значения в r -сечениях волновода:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi_m(r, z) + [k^2 - \kappa_m^2(r)] \varphi_m(r, z) = 0, \quad \varphi_m(r, H) = 0, \quad \varphi_m(r, 0) + g_m(r) \varphi_m'(r, 0) = 0. \quad (3)$$

В (3) $\varphi_m'(r, 0) = (\partial \varphi_m(r, z) / \partial z)|_{z=0}$, $k = \omega/c$, $\kappa_m(r)$ – собственные значения, $g_m(r)$ характеризует импеданс проницаемого дна в виде поглощающего полупространства осадков при $z \leq 0$, а шероховатая поверхность H задаётся реализациями случайной функции $H(r)$. При этом собственные значения $\kappa_m(r)$, собственные функции $\varphi_m(r, z)$ и локальные моды волновода $G_m(r)\varphi_m(r, z)$, $F_m(r)\varphi_m(r, z)$ также случайны. Условие на границе вода-осадки, записанное через функцию g_m в (3), соответствует непрерывности давления и вертикальной компоненты скорости моды при пересечении границы, и также $\varphi_m(r, z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$ (для нормальных мод).

Уравнения для амплитуд мод

Будем считать, что часть волновода со случайно-шероховатой поверхностью расположена в произвольной горизонтальной области справа от источника звука $0 < L < r < L_0$, а при $0 < r < L$ и $r > L_0$ волновод слоистый. Введём векторы модовых амплитуд $\vec{G}(r) = \{G_m(r)\}^T$, $\vec{F}(r) = \{F_m(r)\}^T$, и квадратные матрицы $\mathbf{G}(r)$, $\mathbf{F}(r)$ размера ($M \times M$), такие, что $\vec{G}(r) = \mathbf{G}(r)\vec{b}(L)$, $\vec{F}(r) = \mathbf{F}(r)\vec{b}(L)$, где $\vec{b}(L)$ – вектор-столбец амплитуд мод, падающих на нерегулярную среду, с элементами $b_m(L) = \varphi_m(0, z_0)\kappa_m^{-1/2}(L)\exp[i\kappa_m(L)L]$ в области $|\kappa_m r| \gg 1$. На основании (1)–(3), матрицы $\mathbf{G}(r)$, $\mathbf{F}(r)$ описываются следующей краевой задачей для уравнений метода поперечных сечений:

$$\frac{\partial \mathbf{G}(r)}{\partial r} = \mathbf{F}(r) - \mathbf{V}(r)\mathbf{G}(r), \quad \frac{\partial \mathbf{F}(r)}{\partial r} = -\kappa^2(r)\mathbf{G}(r) + \mathbf{V}^T(r)\mathbf{F}(r), \quad (4a)$$

$$i\kappa(L)\mathbf{G}(L) + \mathbf{F}(L) = 2i\kappa(L), \quad (4b)$$

$$i\kappa(L_0)\mathbf{G}(L_0) - \mathbf{F}(L_0) = 0. \quad (4c)$$

Задача (4a)–(4c) является задачей о трансформации модовых амплитуд в нерегулярной среде, при падении мод с единичной амплитудой на её границу L . В (4a)–(4c) $\kappa(r)$ – диагональная матрица собственных значений $\kappa_m(r)$, $\mathbf{V}(r)$ – матрица взаимодействия мод с элементами $V_{mn}(r) = \int_{-\infty}^H \frac{\varphi_m(r, z)}{\rho(r, z)} \frac{\partial \varphi_n(r, z)}{\partial r} dz$, а $\mathbf{V}^T(r)$ – транспонированная матрица \mathbf{V} . В нашем случае, $\rho(r, z) = \rho(z)$, и матрица взаимодействия мод кососимметрическая: $V_{mn}(r) = -V_{nm}(r)$, $V_{nn} = 0$ [Бреховских и Годин, 2009]. На основе метода погружения [Кляцкин, 1986, 2001] краевая задача (4a)–(4c) может быть переформулирована в задачу с начальными условиями по параметру L для уравнений погружения, которые в точности эквивалентны исходным уравнениям (4a)–(4c), и являются замкну-

тыми для каждой из матриц $\mathbf{G}(r)$, $\mathbf{F}(r)$ [Гулин, 2010; Гулин и др., 2024]. Например, для вычисления $\mathbf{G}(r)$, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial L} \mathbf{G}(r; L) = \mathbf{G}(r; L) \mathbf{C}(L), \quad \mathbf{G}(r; L)|_{L=r} = \mathbf{G}(r; r), \quad (5)$$

$$\frac{d\mathbf{G}(L; L)}{dL} = 2i\kappa(L) - [i\kappa(L) + \mathbf{V}(L)]\mathbf{G}(L; L) + \mathbf{G}(L; L)\mathbf{C}(L), \quad \mathbf{G}(L_0; L_0) = \mathbf{E}, \quad (6)$$

где $\mathbf{C}(L) = -i\kappa(L) + \kappa^{-1}(L)[\kappa'(L) - \mathbf{V}^T(L)\kappa(L)] + [\mathbf{V}(L) + \kappa^{-1}(L)\mathbf{V}^T(L)\kappa(L) - \kappa^{-1}(L)\kappa'(L)]\mathbf{G}(L; L)/2$. Аналогичные уравнения справедливы для матрицы $\mathbf{F}(r)$. В (5), (6) L – переменный параметр положения границы нерегулярной среды, включенный в число аргументов матриц, $\mathbf{G}(r; L) \equiv \mathbf{G}(r)$ – квадратная матрица, подлежащая определению, $\kappa'(r)$ – диагональная матрица производных собственных значений $\kappa_m(r)$, \mathbf{E} – единичная матрица. Уравнение Риккати (6) описывает матрицу $\mathbf{R}(L; L)$ амплитуд мод обратно рассеянного поля в сечениях среды: $\mathbf{R}(L; L) = \mathbf{G}(L; L) - \mathbf{E}$ [Гулин и др., 2024]. Если флуктуации поверхности волновода относительно невелики, а их характерные масштабы превышают длину волны звука, то в исследуемой задаче для значимых мод обратно рассеянное поле достаточно мало, $|R_{mn}(L; L)| < 10^{-2}$. Если им пренебречь, справедливо приближение однонаправленного распространения (OP), которое описывается уравнением (5) с условием $\mathbf{G}(r; r) = \mathbf{E}$. При этом уравнение (5) в транспонированном виде решается посредством матрицанта [Гантмахер, 1988], который допускает экспоненциальное представление решения (через матричную экспоненту), если на каждом шаге вычислительной процедуры аппроксимировать матричный коэффициент $\mathbf{C}(L)$ постоянной матрицей. Тогда на всем интервале расстояний решение представляется произведением матричных экспонент. С точки зрения модельных расчётов это позволяет не только упростить алгоритм, но и значительно повысить скорость вычислений по сравнению с численным интегрированием дифференциальных уравнений (5), (6), дающих решение, которое далее называем точным. Из (4a), (5) следуют и другие известные приближения. Приближение плавных возмущений ВКБ [Луньков и Петников, 2010; Луньков и др., 2017; Katsnelson et al., 2012] получается из 1-го уравнения (4a) при подстановке $\mathbf{F}(r) = i\kappa(r)\mathbf{G}(r)$. В этом случае ищется решение матричного уравнения $\frac{\partial \mathbf{G}(r)}{\partial r} = i\kappa(r)\mathbf{G}(r) - \mathbf{V}(r)\mathbf{G}(r)$, $\mathbf{G}(L) = \mathbf{E}$. Пренебрежение в этом уравнении взаимодействием мод, $V_{mn}(r) = 0$, приводит к адиабатическому приближению.

Согласно уравнениям (2), (3), (5), (6), вычисляя поле звукового давления $p(r, z)$ для каждой случайной реализации $H(r)$ из ансамбля независимых реализаций, получим изменение средней интенсивности сигнала в волноводе, или средние потери при распространении (с обратным знаком), при $|\kappa_m r| \gg 1$:

$$\langle I \rangle = \langle |p|^2 \rangle = (8\pi r)^{-1} \sum_{m=1}^M \langle |G_m|^2 |\varphi_m|^2 \rangle + (8\pi r)^{-1} \sum_{(m \neq n)} \sum_n \langle G_m G_n^* \varphi_m \varphi_n^* \rangle. \quad (7)$$

Угловые скобки означают статистическое усреднение, которое при моделировании заменяется алгебраической формулой $\langle I \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N I_k$ [Gulin and Yaroshchuk, 2014], I_k – интенсивность звукового сигнала в k -той реализации статистического ансамбля. Также важным индикатором относительных флуктуаций интенсивности звука в случайно-неоднородном волноводе является индекс сцинтиляций S^2 , $S = [\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2]^{1/2}/\langle I \rangle$ [Гулин и др., 2024; Рытов и др., 1978]. Первая модовая сумма в (7) представляет некогерентные слагаемые и описывает усреднённый (по масштабу пространственной интерференции) монотонный закон спадания интенсивности $\langle I_{\text{nch}} \rangle$. Вторая сумма (двойная) когерентных слагаемых описывает интерференционную структуру интенсивности, накладывающуюся на монотонный закон спадания. Если интерференционная структура существенна на дистанциях в десятки километров (многомодовая ситуация), то для оценки воздействия волнения на потери при распространении для наглядности целесообразно принимать

во внимание только первую сумму некогерентных слагаемых в (7): $\langle I_{\text{nch}} \rangle$, S_{nch} , – что будет сделано в дальнейшем для отражающей донной границы.

Модель волновода мелкого моря с взволнованной поверхностью

Для проведения статистического моделирования была осуществлена привязка к значениям параметров, которые характерны для шельфовых зон восточных арктических морей, в частности, районов Карского моря, летом, и шельфа Японского моря, в осенний период. Рассматривался мелководный волновод, в котором происходит распространение тонального звукового сигнала частоты 500 Гц (длина волны $\lambda \approx 2,9$ м). Волновод имеет среднюю глубину $\langle H(r) \rangle = 40$ м, случайно-шероховатую поверхность и горизонтальное дно. В водном слое однородные профили скорости звука $c = 1460$ м/с и плотности $\rho = 1,02$ г/см³. Дно, $z \leq 0$, представляет собой жидкое поглощающее полу-пространство неконсолидированных осадков. Следуя данным измерений, приведённым в [Григорьев и др., 2018; Луньков и др., 2024; Яшин и Ким, 2007], задаём импеданс дна посредством плотности, $\rho_1 = 1,85$ г/см³, поглощения $\beta_1 = 0,02$ (≈ 1 дБ/λ) и скорости звука c_1 . Шероховатости взволнованной поверхности $\delta h(r)$, $H(r) = \langle H \rangle + \delta h(r)$, полагаем однородным, изотропным гауссовым случайным процессом с корреляционной функцией $B_s(r) = \sigma_s^2 K(r)$, $r = |r_2 - r_1|$. Интенсивность флуктуаций $\sigma_s^2 = \langle (\delta h)^2 \rangle$ задавалась величиной $\sigma_s^2 = 1$ м². Важный параметр – эффективный радиус корреляции случайных неоднородностей L_s . Это – характерный масштаб поверхности волнения и изменения батиметрии $H(r)$, такой что $L_s > \lambda$, $L_s \gg \sigma_s$. При постоянной скорости звука в водном слое и донных осадках функция импеданса $g_m(r)$ в граничном условии к (3) определяется своими локальными значениями в поперечных сечениях волноводов сравнения Пекериса. Для достоверности результатов статистического моделирования рассчитывался ансамбль из 500 независимых случайных реализаций всех интересующих функций. Для средней интенсивности в таком случае относительная ошибка результатов численного моделирования не превышает 1%, а для флуктуаций интенсивности сигнала (сцинтиляций) составляет менее 3%. Это позволяет обеспечить приемлемую (с точки зрения статистического анализа) точность результатов моделирования.

Корреляционные функции взволнованной поверхности

Как указано выше, шероховатая свободная поверхность задавалась однородным, изотропным гауссовым случайным процессом с интенсивностью флуктуаций σ_s^2 и радиусом корреляции L_s . Ниже определим эти параметры, исходя из известных данных о поверхностном волнении с частотным спектром Пирсона – Неймана, который получил широкое распространение в литературе для описания развитого поверхности волнения [Бреховских и Лысанов, 2007; Луньков и Петников, 2010; Луньков и др., 2017]: $D(\Omega) = D[(gk)^{1/2}] = A(gk)^{-3} \exp(-2g/(kv^2))$, Ω – частота волнения, k – волновое число, v – скорость ветра в м/с, $A = 2,4$ м²/с⁵ – эмпирическая константа, g – ускорение свободного падения. Если $\Omega = (gk)^{1/2}$ – дисперсионное уравнение для поверхностных волн, связывающее частоту Ω и волновое число $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$, то корреляционная функция $B_s(r)$ выражается через пространственную спектральную плотность $G(k)$, как [Бреховских и Лысанов, 2007; Рытов и др., 1978]:

$$B_s(r) = 2\pi \int_0^\infty dk k J_0(kr) G(k), \quad G(k) = \frac{\sqrt{g}}{2k\sqrt{k}} D(\sqrt{gk}) R(k, \alpha). \quad (8)$$

В (8) $J_0(kr)$ – функция Бесселя нулевого порядка, $R(k, \alpha) = b \cos^{v(k)} \alpha$ описывает зависимость от направления ветра, $b = (2\pi)^{-1}$ – нормировочная константа, α – угол между направлением ветра и волнения. Для простоты и усиления статистического

эффекта считаем, что угол между направлением ветра и волнения равен нулю, тогда $R(k, 0) = (2\pi)^{-1}$. Согласно (8) корреляционная функция принимает вид:

$$B_s(r) = 0,5Ag^{-5/2} \int_0^{\infty} dk k^{-7/2} J_0(kr) e^{-2g/(kv^2)}. \quad (9)$$

Интенсивность флюктуаций вычисляется: $\sigma_s^2 = B_s(0) = 2^{-7/2} Ag^{-5} \Gamma(5/2) v^5 \approx 3,12 \times 10^{-6} v^5$, – то есть она целиком определяется скоростью ветра v , Γ – гамма-функция. Аналогично, вычислив корреляционную функцию (9), можно получить и эффективный масштаб корреляции $L_s = \int_0^{\infty} dr K(r)$, $K(r) = B_s(r)/B_s(0)$. На [рис. 1](#) приведено поведение трёх коэффициентов корреляции $K(r)$ для моделирования развитого волнения в направлении ветра, дующего над поверхностью со скоростью $v \approx 12,6$ м/с. Данной скорости ветра соответствуют значения статистических параметров $\sigma_s^2 \approx 1$ м² и $L_s \approx 20$ м. Коэффициенты корреляции с данными параметрами σ_s^2 и L_s , представленные на [рис. 1](#), были использованы далее для выполнения сравнительных модельных расчётов.

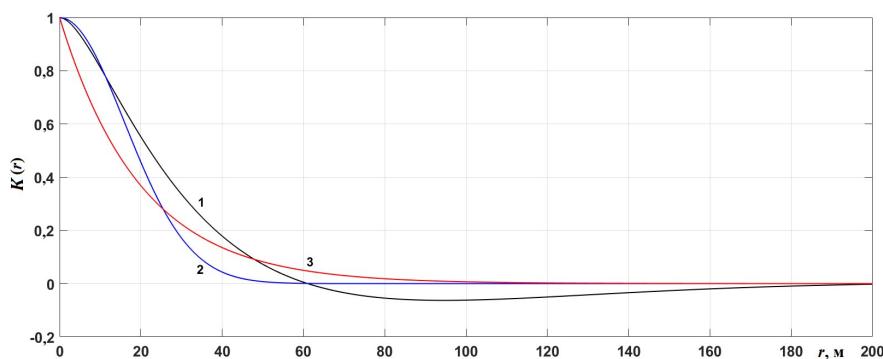


Рис. 1. Коэффициенты корреляции для разных частотных спектров. Кривые: 1 – для спектра Пирсона – Неймана, 2 – гауссова функция корреляции $B_s(r) = \sigma_s^2 \exp[-\pi r^2/(4L_s^2)]$, 3 – экспоненциальная функция корреляции $B_s(r) = \sigma_s^2 \exp(-r/L_s)$.

Волновод с сильно проницаемой донной границей

Численное статистическое моделирование средней интенсивности и её флюктуаций выполнено для мелководного волновода с двумя типами донной границы. Сначала рассмотрим границу с сильной проницаемостью (водоподобного типа), $c_1 = c = 1460$ м/с, часто присутствующую на участках шельфа арктических морей, имеющих газонасыщенность в донных осадках [Григорьев и др., 2018]. Характерный масштаб изменения $H(r)$, $L_s = 20$ м, для частоты сигнала 500 Гц соответствует шероховатостям относительно небольшого масштаба: $L_s \approx 6,8\lambda$. При вычислениях мод осуществлялась привязка к разрезу Пекериса на комплексной плоскости волновых чисел $\kappa(r)$ [Григорьев и Петников, 2016]. В случае сильно проницаемой границы волновода все моды дискретного спектра κ относятся к классу вытекающих. Их собственные значения κ_m комплексны и, кроме первых, имеют значительную мнимую часть. Вкладом непрерывного спектра волновых чисел κ пренебрегаем, ввиду его несущественности в данной задаче [Гулин и др., 2024]. При расчётах отдельных реализаций для частоты сигнала 500 Гц принимались во внимание 16 мод, определяющих звуковое поле при $r > 200$ м, с точностью до десятых долей децибела. Заметим, что параметр Рэлея $P_m = 2\sigma_s(k^2 - \kappa_m^2)^{1/2}$, характеризующий величину рассеяния мод для данного волновода [Бреховских и Лысанов, 2007; Рытов и др., 1978], не удовлетворяет условию малости $P_m \ll 1$, поэтому применение здесь метода малых возмущений, как выполнено в работе [Луньков и др., 2017], не является обоснованным. На [рис. 2](#) представлены результаты расчётов. Везде на графиках осуществлена классическая привязка к уровню поля в свободном пространстве на

расстоянии 1 м от источника. Хорошо видно, что для водоподобного дна средняя интенсивность в адиабатическом приближении (красная кривая, верхний правый график) слабо (на $\approx 0,05$ дБ) отличается от интенсивности в волноводе с невозмущенной поверхностью (зелёная кривая). В то же время от точного решения (5), (6) и приближений ОР, ВКБ, учитывающих взаимодействие мод, кривая адиабатического приближения заметно отличается. Для точек источника и наблюдения, расположенных в водном слое в области горизонта максимального значения функции первой моды $|\varphi_{m=1}(z)|$, $z_0 = z = 16$ м, различие уровней кривых средней интенсивности для точного решения, ВКБ и «адиабатики» меняется от $\approx 0,7$ дБ на первых километрах дистанции до $\approx 2,3$ дБ на расстоянии 20 км. Исключением являются близкие к источнику расстояния, $r < 0,5$ км, на которых существенны все моды, и интерференция увеличивает расхождение кривых, соответствующих разным методам, в минимумах и максимумах. При $r > 1,5$ –2 км происходит переход к двух- и одномодовому распространению сигнала с постепенным увеличением расхождения кривых 1 и 2, 3, что обусловлено накапливающимся воздействием флюктуаций поверхности через взаимодействие мод. Последний эффект в адиабатическом приближении не учитывается. Постепенное расхождение кривых свидетельствует о медленном изменении закона затухания средней интенсивности с дистанцией в результате рассеяния сигнала на взволнованной поверхности. В то же время величина дополнительного затухания по трассе не является значительной. Статистический эффект от воздействия взволнованной поверхности становится существенным лишь на больших дистанциях распространения, достигая 5 дБ для $r \approx 50$ км. Однако рассмотрение таких расстояний при допущении о развитом волнении с фиксированной скоростью ветра не является типичным для исследований в мелком море. Кроме того, за счёт сильной проницаемости донной границы, затухание сигнала велико уже на расстояниях 20–30 км, что в реальных экспериментах затрудняет приём сигнала на больших расстояниях.

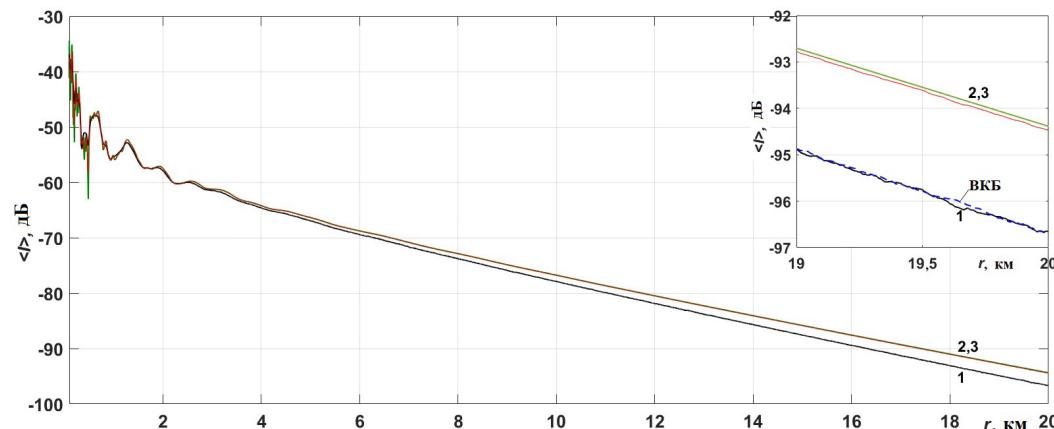


Рис. 2. Затухание средней интенсивности $\langle I \rangle$ сигнала в волноводе с проницаемым дном, спектр волнения Пирсона – Неймана. Кривые: 1 – точное решение, штрих – приближение ВКБ, 2 – адиабатическое приближение, 3 – невозмущенный волновод.

Особенностью индекса сцинтиляций $S^2(r)$ является факт весьма малых флюктуаций интенсивности по трассе распространения. Видно (рис. 3), что величина $S(r)$ в установившемся режиме на отрезке $r \in (5–20)$ км колеблется относительно уровня $S_{\text{стан}} \approx 0,15 \ll 1$. Уровень S в адиабатическом приближении располагается примерно в 3 раза ниже. Малость флюктуаций интенсивности указывает на слабую стохастичность в поведении энергетических характеристик сигнала в рассматриваемой задаче. Этим, в частности, объясняется факт небольшого дополнительного затухания средней интенсивности сигнала на расстоянии 20 км за счёт взволнованной поверхности (рис. 2).

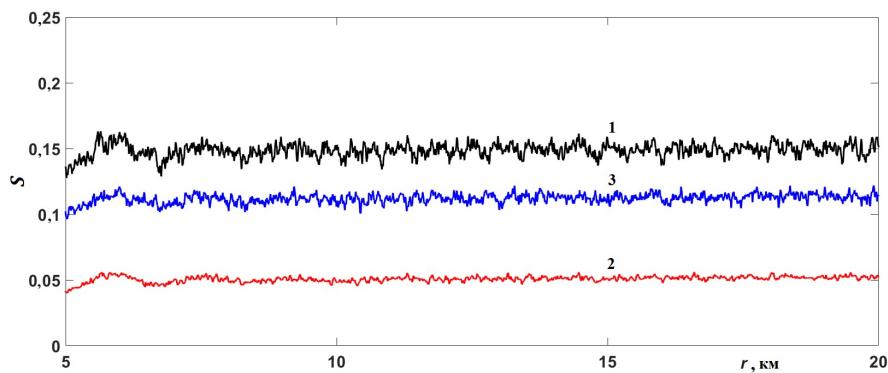


Рис. 3. Сцинтилляции сигнала S в волноводе с проницаемым дном, спектр волнения Пирсона – Неймана. Кривые: 1 – точное решение, 2 – адиабатическое приближение, 3 – приближение ВКБ.

Представляет интерес сопоставить кривые $\langle I \rangle$ и S при распространении сигнала в волноводе с водоподобной границей для разных функций корреляции (рис. 1), моделирующих поверхностное волнение. Из рис. 4 хорошо видно, что для выбранных корреляционных функций – со спектром Пирсона – Неймана, гауссовой и экспоненциальной, получаются близкие результаты. Для средней интенсивности различие между кривыми по всей трассе не превышает 0,5 дБ. Сцинтилляции $S(r)$, приведённые в линейном масштабе, для разных корреляционных функций волнения различается менее чем на 10%. По причине близости кривых, на графиках рис. 4 показан только последний участок дистанции в увеличенном масштабе. На всей остальной трассе, исключая интерференционную область $r < 0,5$ км, кривые малоразличимы и имеют вид зависимостей, представленных на рис. 2 для спектра Пирсона – Неймана. Очевидно, что кривые «адиабатики», соответствующие разным корреляционным функциям поверхностного волнения, различимы ещё хуже. Так, на левом графике рис. 4 различие менее 0,05 дБ, и оно наблюдается при $r > 0,5$ км. Это обусловлено приближенным характером «адиабатического» описания статистики сигнала в волноводе.

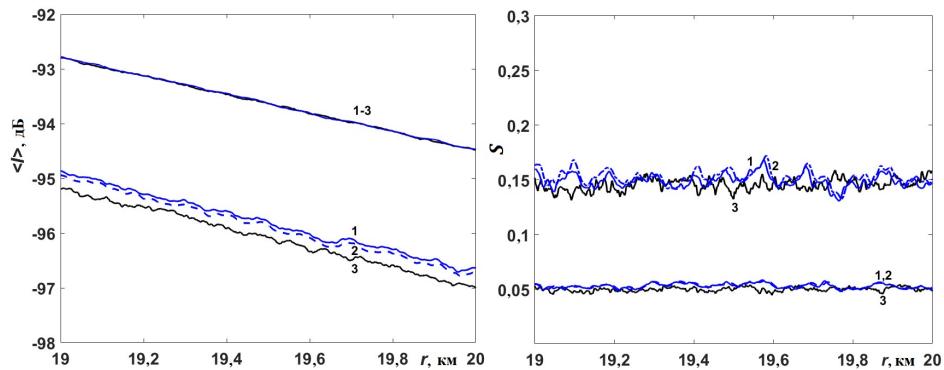


Рис. 4. Средняя интенсивность $\langle I \rangle$ и сцинтилляции интенсивности S в волноводе с проницаемым дном для разных функций корреляции волнения. Левый график, нижние кривые – точное решение $\langle I \rangle$: 1 – спектр Пирсона – Неймана; 2 (штрих) – гауссова корреляционная функция; 3 – экспоненциальная корреляционная функция; верхние кривые 1–3 – адиабатическое приближение для указанных функций корреляции. Правый график, верхние кривые – точное решение для S : 1 – спектр Пирсона – Неймана; 2 (штрих) – гауссова корреляционная функция; 3 – экспоненциальная корреляционная функция; нижние кривые 1–3 – адиабатическое приближение для указанных функций корреляции.

Из рассмотрения вытекает важный вывод, что вид корреляционной функции (спектра) поверхностного волнения не оказывает существенного влияния на статистическую картину распространения сигнала в волноводе, и поэтому корреляционная функция может быть выбрана из соображений удобства исследования. Основную роль играют параметры волнения – его интенсивность σ_s^2 и радиус корреляции L_s , которые определяются скоростью ветра над поверхностью моря. Чем она больше, тем сильнее влияние параметров σ_s , L_s на статистику сигнала.

Волновод с отражающей донной границей

Для достаточно типичной в мелком море донной границы характерны значения скорости звука $c = 1460$ м/с, $c_1 = 1600$ м/с, которые встречаются как в Арктике, так и, например, в шельфовых зонах Японского моря. Для дна с таким импедансом в водном слое волновода на частоте 500 Гц формируется 11 распространяющихся мод, взаимодействующих между собой из-за флюктуаций поверхности моря. При численном моделировании дополнительно были учтены 13 вытекающих мод, что позволяет адекватно рассмотреть звуковое поле, начиная с расстояний $r > 100$ м от источника. Параметр Рэлея P_m для данного волновода также не удовлетворяет условию $P_m \ll 1$, для большинства мод $P_m \sim 1-2$. По сравнению с предыдущим случаем водоподобной границы слабозатухающих мод становится много, и картина интенсивности в волноводе характеризуется выраженной осцилляционной структурой, которая присутствует на всей трассе. Для отделения эффектов статистики от интерференционных осцилляций, как отмечено в комментариях к формуле (7), в реализациях рассматривались усреднённые (по масштабам интерференции мод) законы $\langle I_{nch} \rangle$, S_{nch} . Из сопоставления статистических зависимостей точного решения и адиабатического приближения на [рис. 5](#) и [рис. 6](#) видно, что закономерности аналогичны изображённым на [рис. 2-4](#) для водоподобного дна, при тех же $z_0 = z = 16$ м. Различие уровней $\langle I_{nch} \rangle$ точного решения и «адиабатики» составляет 2,3–2,7 дБ на расстоянии 20 км. Для сравнения с $\langle I_{nch} \rangle$ [рис. 5](#) дополнен осциллирующими кривыми средней интенсивности $\langle I \rangle$ (7).

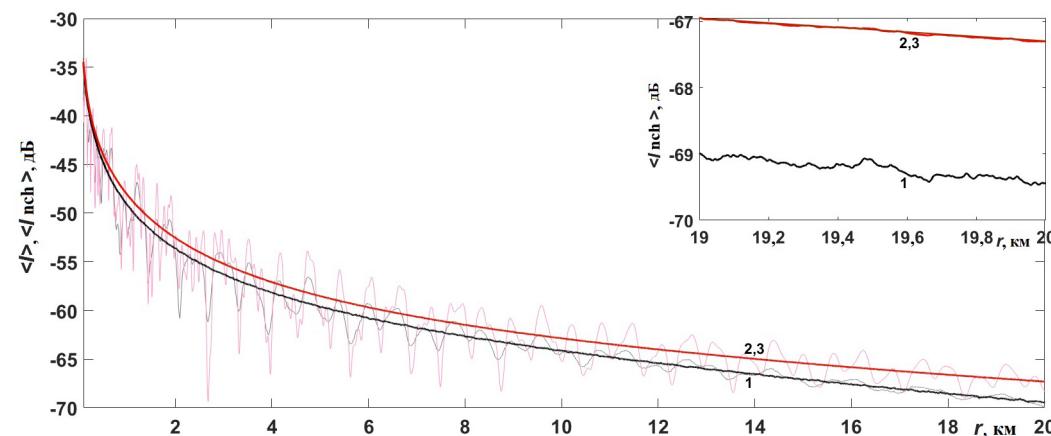


Рис. 5. Средняя интенсивность сигнала в волноводе с отражающим дном. Спектр волнения Пирсона – Неймана. Жирные кривые: 1 – точное решение, 2 – адиабатическое приближение, 3 – невозмущенный волновод.

Для разных корреляционных функций волнения в случае отражающего дна, как видно из [рис. 6](#), различие уровней $\langle I_{nch} \rangle$ не превышает 0,5 дБ (верхний график). Аналогичная разница уровней была получена и для водоподобного дна на [рис. 4](#).

Для индекса спиритилляций (нижний график) все кривые разных корреляционных функций волнения в адиабатическом приближении очень близки, поэтому на графике [рис. 6](#) они плохо различимы. Отличие между кривыми спиритилляций точного решения, как и для волновода с водоподобной донной границей, составляет 9–11%. В то же время сам уровень кривых несколько более высокий ($S_{nch} \approx 0,2$), чем на [рис. 3](#) ($\approx 0,15$),

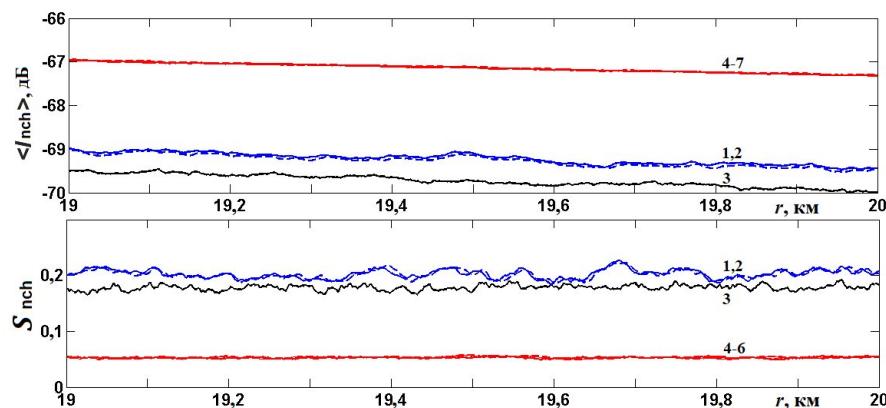


Рис. 6. Средняя интенсивность и сцинтилляции интенсивности сигнала в волноводе с отражающим дном для разных функций корреляции волнения. Верхний график, нижние кривые – точное решение: 1 – спектр Пирсона – Неймана; 2 (штрих) – гауссова корреляционная функция; 3 – экспоненциальная корреляционная функция. Верхние кривые 4–6 – адиабатическое приближение для указанных функций корреляции, 7 – невозмущенный волновод. Нижний график – аналогичные кривые 1–3 и 4–6 для сцинтилляций.

то есть флюктуации интенсивности немного усиливаются с ростом отражательной способности дна.

Следует отметить, что в работе [Луньков и др., 2017] также был установлен факт слабого влияния поверхностного волнения на средние потери при распространении сигнала (PL). Приведём лишь качественные соображения относительно результатов этой работы, поскольку для детального количественного сравнения необходима идентичность параметров сопоставляемых волноводов, а также статистических характеристик поверхностного волнения, таких как интенсивность и радиус корреляции флюктуаций (отсутствует в цитируемой работе). Статистическая оценка потерь для отражающей границы волновода ($c_1 = 1600 \text{ м/с}$), на наш взгляд, получилась несколько завышенной по сравнению с результатами, приведёнными на рис. 5. Это характерно как для небольших расстояний $1 < r < 6 \text{ км}$ (например, для 6 км авторы дают увеличение потерь $\Delta PL = 2,2 \pm 0,43 \text{ дБ}$; на рис. 5 такая величина ΔPL характерна для $r \approx 19\text{--}20 \text{ км}$), так и для диапазона $r \in (20\text{--}30 \text{ км})$, где согласно авторам «потери при распространении увеличиваются на 3–5 дБ на расстоянии в 30 км, частоте звука 300 Гц и скорости ветра 12 м/с». Выше было отмечено, что величина $\Delta PL \approx 5 \text{ дБ}$ может быть достигнута лишь при $r \approx 50 \text{ км}$. Мы считаем, что с точки зрения статистической картины распространяющихся сигналов, например, моментов интенсивности, присутствующая разница параметров сопоставляемых моделей (это, главным образом, глубина моря и частота звука) не должна приводить к принципиальным различиям результатов. В то же время даже небольшого отличия интенсивностей и радиусов корреляции флюктуаций ветрового волнения достаточно, чтобы изменить статистическую картину, и привести к разным выводам о влиянии поверхностного волнения. Последнее будет дополнитель но подчёркиваться приближенным характером исследования в работе [Луньков и др., 2017], и использованием малочисленного ансамбля независимых реализаций ($N = 10$ и 30), рассчитываемых для модельных вычислений. С другой стороны оказалось, что в данной статистической задаче метод ВКБ обеспечивает хорошее приближение к ОР и точному решению на большей части трассы распространения, и это справедливо как для водоподобной, так и для отражающей донной границы. Этот вывод касается средней интенсивности, для сцинтилляций интенсивности на рис. 3 заметно отличие (кривые 1 и 3).

Заключение

В настоящей работе исследована статистическая задача о распространении низкочастотного звукового сигнала в волноводе мелкого моря с взволнованной поверхностью и горизонтальным импедансным поглощающим дном. Перечислим основные результаты.

1. Без приближений получено численное решение статистической задачи для уравнений метода поперечных сечений, описывающих трансформацию модовых амплитуд в волноводе со случайно-шероховатой (взволнованной) поверхностью. Решение показывает, что влияние развитого поверхностного волнения с типичными характеристиками приводит к небольшому дополнительному затуханию средней интенсивности сигнала в мелком море. Затухание связано с перераспределением акустической энергии между модами волновода. Данный эффект составляет несколько децибел на трассах протяжённостью 20 километров. Расчёты показывают, что флуктуации энергетических характеристик сигнала (сцинтиляции) малы, и указывают на слабую степень стохастичности в задаче о влиянии поверхностного волнения.
2. Несмотря на разное модовое содержание звукового сигнала, распространяющегося в волноводах с водоподобной донной границей и границей с высокой отражающей способностью, заметного различия в величине дополнительного затухания сигнала за счёт взволнованной поверхности не получено. Этот результат расходится с утверждениями авторов работы [Луньков и др., 2017], где в приближенных вычислениях получена разная величина затухания звука для аналогичного типа донной границы.
3. Вид корреляционной функции (пространственного спектра) поверхностного волнения не оказывает существенного влияния на статистическую картину распространения сигнала в волноводе. Основную роль играют параметры случайного поля волнения – его интенсивность σ_s^2 и эффективный радиус корреляции L_s , которые определяются скоростью ветра над поверхностью моря.
4. В процессе вычислений установлено, что, несмотря на небольшое влияние развитого поверхностного волнения (при скорости ветра 12–13 м/с) на характеристики сигнала, приближенные методы, такие как метод малых возмущений и «адиабатика», не обеспечивают приемлемого описания. Это связано с отсутствием корректного учёта взаимодействия мод в волноводе. Точное решение, приближения ОР и ВКБ, учитывающие степень межмодовой связи, позволяют дать качественное, а для средней интенсивности и количественное описание факта воздействия случайных неровностей границы на распространение сигнала.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания по теме «Изучение природы линейного и нелинейного взаимодействия геосферных полей переходных зон Мирового океана и их последствий», номер гос. регистрации: 124022100074-9.

Список литературы

- Басс Ф. Г. и Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М. : Наука, 1972. — 424 с.
- Бреховских Л. М. и Годин О. А. Акустика неоднородных сред. Т. 2. Звуковые поля в слоистых и трехмерно-неоднородных средах. — М. : Наука, 2009. — 425 с.
- Бреховских Л. М. и Лысанов Ю. П. Теоретические основы акустики океана. — М. : Наука, 2007. — 370 с.
- Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М. : Физматлит, 1988. — 560 с.
- Григорьев В. А. и Петников В. Г. О возможности представления акустического поля в мелком море в виде суммы нормальных мод и квазимод // Акустический журнал. — 2016. — Т. 62, № 6. — С. 681–698. — <https://doi.org/10.7868/s0320791916050038>.
- Григорьев В. А., Петников В. Г., Росляков А. Г. и др. Распространение звука в мелком море с неоднородным газонасыщенным дном // Акустический журнал. — 2018. — Т. 64, № 3. — С. 342–358. — <https://doi.org/10.7868/s032079191803005x>.

- Гулин О. Э. Моделирование распространения низкочастотного звука в нерегулярном мелководном волноводе с жидким дном // Акустический журнал. — 2010. — Т. 56, № 5. — С. 642—650.
- Гулин О. Э. и Ярошук И. О. Зависимость средней интенсивности низкочастотного акустического поля от параметров дна мелкого моря с объемными случайными неоднородностями водного слоя // Акустический журнал. — 2018. — Т. 64, № 2. — С. 186—190. — <https://doi.org/10.7868/s0320791918020065>.
- Гулин О. Э., Ярошук И. О. и Коротченко Р. А. О средней интенсивности поля и отдельных мод низкочастотного звукового сигнала в мелководном волноводе со статистически неровной донной границей // Акустический журнал. — 2024. — Т. 70, № 4. — С. 517—535. — <https://doi.org/10.31857/s0320791924040077>.
- Кляцкин В. И. Метод погружения в теории распространения волн. — М. : Наука, 1986. — 256 с.
- Кляцкин В. И. Стохастические уравнения глазами физика (основные положения, точные результаты и асимптотические приближения). — М. : Физматлит, 2001. — 528 с. — EDN: [UGLKX](#).
- Луньков А. А., Григорьев В. А. и Петников В. Г. Акустические характеристики морского дна и их влияние на дальнее распространение звука на арктическом шельфе // Успехи Физических Наук. — 2024. — Т. 194, № 2. — С. 184—207. — <https://doi.org/10.3367/ufnr.2023.10.039600>.
- Луньков А. А. и Петников В. Г. Влияние случайных гидродинамических неоднородностей на затухание низкочастотного звука в мелком море // Акустический журнал. — 2010. — Т. 56, № 3. — С. 364—372.
- Луньков А. А., Петников В. Г. и Черноусов А. Д. Затухание звука на океанском шельфе на небольших расстояниях от источника в присутствии поверхностного волнения // Акустический журнал. — 2017. — Т. 63, № 2. — С. 180—186. — <https://doi.org/10.7868/s0320791917010087>.
- Рытов С. М., Кравцов Ю. А. и Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля. — М. : Наука, 1978. — 464 с.
- Яшин Д. С. и Ким Б. И. Геохимические признаки нефтегазоносности Восточно-Арктического шельфа России // Геология нефти и газа. — 2007. — № 4. — С. 25—29. — EDN: [JWIBYF](#).
- Darmon M., Dorval V. and Baqué F. Acoustic Scattering Models from Rough Surfaces: A Brief Review and Recent Advances // Applied Sciences. — 2020. — Vol. 10, no. 22. — P. 8305. — <https://doi.org/10.3390/app10228305>.
- Gulin O. E. and Yaroshchuk I. O. Simulation of underwater acoustical field fluctuations in shallow sea with random inhomogeneities of sound speed: depth-dependent environment // Journal of Computational Acoustics. — 2014. — Vol. 22, no. 01. — P. 1440002. — <https://doi.org/10.1142/s0218396x14400025>.
- Katsnelson B., Petnikov V. and Lynch J. Fundamentals of Shallow Water Acoustics. — NY, USA : Springer US, 2012. — 540 p. — <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9777-7>.
- Ogilvy J. A. Wave scattering from rough surfaces // Reports on Progress in Physics. — 1987. — Vol. 50, no. 12. — P. 1553—1608. — <https://doi.org/10.1088/0034-4885/50/12/001>.

ON STATISTICAL MODELING OF ACOUSTIC PROPAGATION LOSSES OF LOW-FREQUENCY SOUND IN A WAVEGUIDE OF A SHALLOW SEA WITH DEVELOPED SURFACE WAVES

O. E. Gulin^{**},¹ , G. I. Dolgikh¹ , and I. O. Yaroshchuk¹ 

¹V. I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russia

****Correspondence to:** Oleg Gulin, gulinoe@poi.dvo.ru.

A statistical problem of the propagation and scattering of a low-frequency acoustic signal in a shallow-water waveguide with a randomly rough surface and a horizontal absorbing liquid bottom is considered. This inhomogeneous waveguide is studied using the cross-sectional method and local mode theory. To determine the mode amplitudes, a boundary value problem is formulated, which is replaced by a corresponding problem with initial conditions for the imbedding equations. The latter equations are solved without approximations using standard computational schemes, allowing for efficient modeling of the statistical characteristics of the sound signal field. This paper presents calculations of signal intensity attenuation and its fluctuations in an Arctic waveguide under developed surface waves and for two types of bottom boundary impedance. It is shown that the influence of a random surface on the intensity of a propagating signal is relatively small for paths of typical length in shallow water. Intensity losses due to fluctuations increase slowly with distance. A comparison of the results obtained using different methods for solving this statistical problem (adiabatic, WKB-approximation) reveals an observable quantitative discrepancy. It is shown that the type of the correlation function (spectrum) of surface fluctuations has little effect on the average intensity of the signal field, and attenuation is determined by the amplitude of the fluctuations and their correlation radius.

Keywords: Shallow-water Arctic waveguide, randomly rough sea surface, cross-section method, local modes, imbedding equations, one-way propagation, adiabatic approximation, WKB-method, statistical modeling.

Received: October 7, 2023

Accepted: December 10, 2025

Published: December 22, 2025



© 2025. The Authors.

Citation: Gulin O. E., Dolgikh G. I., Yaroshchuk I. O. (2025), On Statistical Modeling of Acoustic Propagation Losses of Low-Frequency Sound in a Waveguide of a Shallow Sea With Developed Surface Waves, *Russian Journal of Earth Sciences*, 25, ES6013, <https://doi.org/10.2205/2025ES001098>, EDN: RZUHJU

References

- Bass F. G. and Fuchs I. M. Scattering of Waves on a Statistically Rough Surface. — M. : Nauka, 1972. — 424 p. — (In Russian).
- Brekhovskikh L. M. and Godin O. A. Acoustics of Inhomogeneous Media. Vol. 2. Sound Fields in Stratified and Three-Dimensionally Inhomogeneous Media. — M. : Nauka, 2009. — 425 p. — (In Russian).
- Brekhovskikh L. M. and Lysanov Yu. P. Theoretical Foundations of Ocean Acoustics. — M. : Nauka, 2007. — 370 p. — (In Russian).
- Darmon M., Dorval V. and Baqué F. Acoustic Scattering Models from Rough Surfaces: A Brief Review and Recent Advances // Applied Sciences. — 2020. — Vol. 10, no. 22. — P. 8305. — <https://doi.org/10.3390/app10228305>.
- Gantmakher F. R. The Theory of Matrices. — M. : Fizmatlit, 1988. — 560 p. — (In Russian).
- Grigor'ev V. A. and Petnikov V. G. On the possibility of representing an acoustic field in shallow water as the sum of normal modes and quasimodes // Acoustical Physics. — 2016. — Vol. 62, no. 6. — P. 700–716. — <https://doi.org/10.1134/s1063771016050031>.

- Grigor'ev V. A., Petnikov V. G., Roslyakov A. G., et al. Sound propagation in shallow water with an inhomogeneous GAS-saturated bottom // *Acoustical Physics*. — 2018. — Vol. 64, no. 3. — P. 331–346. — <https://doi.org/10.1134/s1063771018030053>.
- Gulin O. E. Simulation of low-frequency sound propagation in an irregular shallow-water waveguide with a fluid bottom // *Acoustical Physics*. — 2010. — Vol. 56, no. 5. — P. 684–692. — <https://doi.org/10.1134/s1063771010050143>.
- Gulin O. E. and Yaroshchuk I. O. Simulation of underwater acoustical field fluctuations in shallow sea with random inhomogeneities of sound speed: depth-dependent environment // *Journal of Computational Acoustics*. — 2014. — Vol. 22, no. 1. — P. 1440002. — <https://doi.org/10.1142/s0218396x14400025>.
- Gulin O. E. and Yaroshchuk I. O. Dependence of the mean intensity of a low-frequency acoustic field on the bottom parameters of a shallow sea with random volumetric water-layer inhomogeneities // *Acoustical Physics*. — 2018. — Vol. 64, no. 2. — P. 186–189. — <https://doi.org/10.1134/s1063771018020069>.
- Gulin O. E., Yaroshchuk I. O. and Korotchenko R. A. On the average field intensity and individual modes of a low-frequency sound signal in a shallow waveguide with a statistically rough bottom boundary // *Acoustical Physics*. — 2024. — Vol. 70, no. 4. — P. 641–658. — <https://doi.org/10.1134/s1063771024602437>.
- Katsnelson B., Petnikov V. and Lynch J. *Fundamentals of Shallow Water Acoustics*. — NY, USA : Springer US, 2012. — 540 p. — <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9777-7>.
- Klyatskin V. I. *The Imbedding Method in Wave Propagation Theory*. — M. : Nauka, 1986. — 256 p. — (In Russian).
- Klyatskin V. I. *Stochastic Equations Through the Eyes of a Physicist (Basic Concepts, Exact Results and Asymptotic Approximations)*. — M. : Fizmatlit, 2001. — 528 p. — EDN: **UGLKXY** ; (in Russian).
- Lunkov A. A., Grigor'ev V. A. and Petnikov V. G. Acoustic properties of the sea bottom and their effect on long-range sound propagation on the Arctic shelf // *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*. — 2024. — Vol. 194, no. 2. — P. 184–207. — <https://doi.org/10.3367/ufnr.2023.10.039600>. — (In Russian).
- Lunkov A. A. and Petnikov V. G. Effect of random hydrodynamic inhomogeneities on low frequency sound propagation loss in shallow water // *Acoustical Physics*. — 2010. — Vol. 56, no. 3. — P. 328–335. — <https://doi.org/10.1134/s1063771010030103>.
- Lunkov A. A., Petnikov V. G. and Chernousov A. D. Sound attenuation on an ocean shelf at short ranges from a source in the presence of surface waves // *Acoustical Physics*. — 2017. — Vol. 63, no. 2. — P. 190–195. — <https://doi.org/10.1134/s1063771017010080>.
- Ogilvy J. A. Wave scattering from rough surfaces // *Reports on Progress in Physics*. — 1987. — Vol. 50, no. 12. — P. 1553–1608. — <https://doi.org/10.1088/0034-4885/50/12/001>.
- Rytov S. M., Kravtsov Yu. A. and Tatarskii V. I. *Introduction to Statistical Radiophysics. Part II. Random Fields*. — M. : Nauka, 1978. — 464 p. — (In Russian).
- Yashin D. S. and Kim B. I. Geochemical features of oil and gas potential of Eastern Arctic shelf of Russia // *Russian oil and gas geology*. — 2007. — No. 4. — P. 25–29. — EDN: **JWIBYF** ; (in Russian).